القدرات المستهدفة

ــ التعبير عن المسافة و التعامد بواسطة الجداء السلمي.
ــ استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية.
ــ استعمال مبرهنة ألكاشي و مبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية .

تمرين رقم 1:

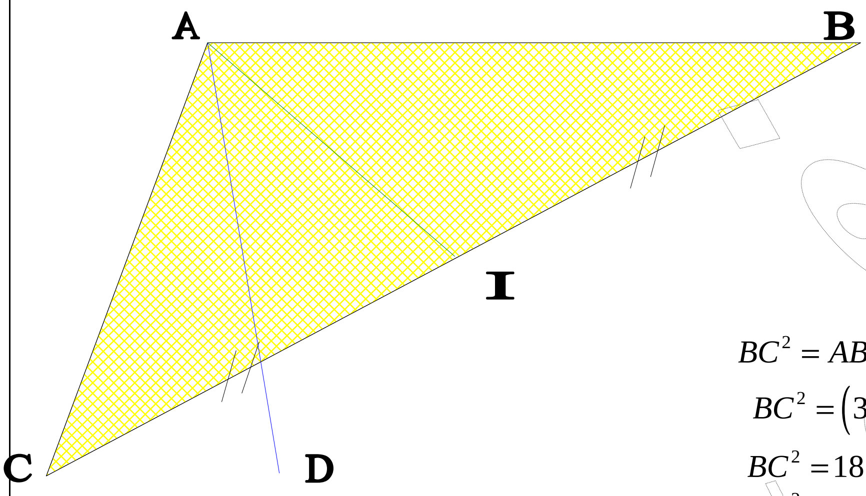
ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=3\sqrt{2}$ و $AC=2\sqrt{2}$ و $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.

1 ـ أ ــ تحقق أن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6$.
ب ــ أحسب المسافة BC .
ج ـ النقطة I هي منتصف القطعة $[BC]$. أحسب المسافة AI .

2 ـ لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A .

تصحيح التمرين رقم 1 :

ABC مثلثا بحيث $AB=3\sqrt{2}$ و $AC=2\sqrt{2}$ و $B\hat{A}C=\frac{2\pi}{3}$.



1 ـ أ ــ

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{2\pi}{3}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6\times2\times\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$$

ب ــ باستعمال مبرهنة ألكاشي :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$BC^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2(-6)$$
$$BC^2=18+8+12$$
$$BC^2=38$$
$$BC=\sqrt{38}$$

ج ـ باستعمال مبرهنة المتوسط

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$$
$$\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=2AI^2+\frac{\left(\sqrt{38}\right)^2}{2}$$
$$18+8=2AI^2+\frac{38}{2}$$
$$26=2AI^2+19$$
$$2AI^2=26-19$$
$$2AI^2=7$$
$$AI^2=\frac{7}{2}$$
$$AI=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

2 ـ لتكن D نقطة بحيث $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. لنحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^2-6$$
$=\frac{18}{3}-6=6-6=0$ وبما أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ فإن المثلث ABD قائم الزاوية في النقطة A

تمرين رقم 2:

ليكن ABC مثلثا بحيث $AB=6$ و $AC=4$ و $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$.

1 ــ أحسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

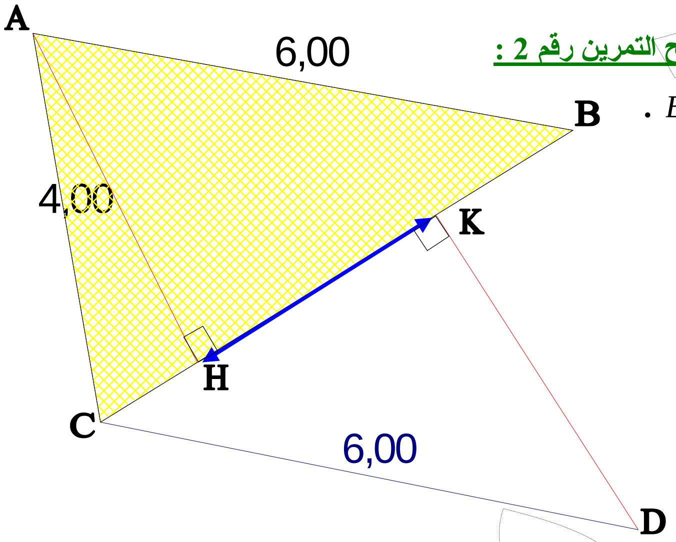
2 ــ أحسب المسافة BC .

3 ــ لتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ و H و K على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين A و D على (BC) .

أ ــ بين أن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=AC^2-AB^2$

ب ــ بين أن $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=-BC\times HK$.

ج ــ استنتج قيمة المسافة HK .



تصحيح التمرين رقم 2 :

1 ـ لدينا ABC مثلثا بحيث $AB=6$ و $AC=4$ و $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos B\hat{A}C$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6\times4\times\cos\frac{\pi}{3}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24\times\frac{1}{2}=12$$

2 ـ
$$BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$BC^2=6^2+4^2-2\times12$$
$$BC^2=36+16-24=52-24=28$$
$$BC=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$$

3 ـ أ ـ لدينا : باستعمال علاقة شال
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=AC^2-AB^2$$

ب ـ باستعمال الاسقاط لدينا
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC}=-HK\times BC$$

ج ـ بما أن : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=AC^2-AB^2$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=-BC\times HK$

فإن : $-HK\times BC=AC^2-AB^2$
$$-HK\times2\sqrt{7}=4^2-6^2$$
$$-HK\times2\sqrt{7}=-20$$
$HK=\frac{-20}{-2\sqrt{7}}$ إذن $HK=\frac{10}{\sqrt{7}}$

تمرين رقم 3:

ليكن $ABCD$ مربع طول ضلعه 4 .

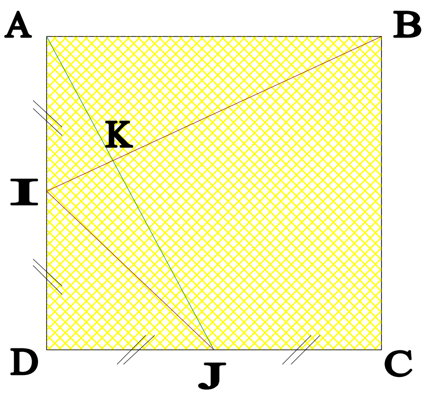
النقطتان I و J هما منتصفا القطعتين $[AD]$ و $[DC]$ على التوالي .

1 ــ أ ــ أحسب $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}$.

ب ــ أحسب $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}$ و استنتج أن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين .

2 ـ أحسب $\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$.

3 ـ لتكن K هي نقطة تقاطع المستقيمين (AJ) و (BI) بين أن : $BK-IK=\frac{6}{\sqrt{5}}$



تصحيح التمرين رقم 3 :

1 ـ أ ـ لدينا : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=AD\times AI=4\times 2=8$

ولدينا : $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}=-DJ\times BA=-2\times 4=-8$

ب ـ لدينا حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)$$
$$=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{AI}$$
$$=0+8-8+0=0$$

بما أن $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=0$ فإن المستقيمين (AJ) و (BI) متعامدين .

2 ـ لنحسب المسافات IJ و IB و BJ .

$BJ^2=BC^2+CJ^2$ $BJ^2=4^2+2^2$ $BJ^2=16+4$ $BJ^2=20$ $BJ=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	$IB^2=IA^2+AB^2$ $IB^2=2^2+4^2$ $IB^2=4+16$ $IB^2=20$ $IB=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	$IJ^2=ID^2+DJ^2$ $IJ^2=2^2+2^2$ $IJ^2=4+4$ $IJ^2=8$ $IJ=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

بتطبيق مبرهنة ألكاشي :

$$BJ^2=IB^2+IJ^2-2\times IB\times IJ\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$\left(2\sqrt{5}\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\sqrt{5}\times 2\sqrt{2}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$20=20+8-8\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)$$
$$8\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=28-20$$
$$\sqrt{10}\times\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=1$$
$$\cos\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

3 ـ لدينا :

$$\left(BK-IK\right)\left(BK+IK\right)=BK^2-IK^2$$

إذن :

$$BK-IK=\frac{BK^2-IK^2}{BK+IK}$$
$$BK-IK=\frac{\left(AB^2-AK^2\right)-\left(AI^2-AK^2\right)}{BI}$$
$$BK-IK=\frac{AB^2-AI^2}{BI}=\frac{4^2-2^2}{2\sqrt{5}}=\frac{12}{2\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

تمرين رقم 4:

ABC مثلث بحيث $AB=4$ و $AC=3$ و $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{5}{6}$.

1 ـ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

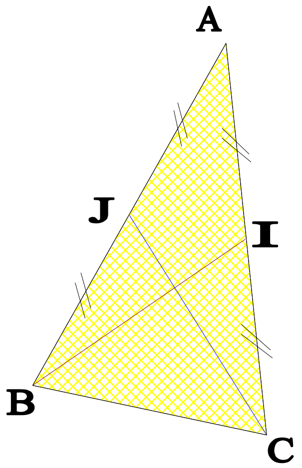
2 ـ أحسب المسافة BC .

3 ـ أ ـ لتكن I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$.

بين أن : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)$.

ب ـ استنتج أن المستقيمين (BI) و (CJ) .

تصحيح التمرين رقم 4 :



1 – لدينا : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

$$= 4 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

2 – باستعمال مبرهنة ألكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 16 + 9 - 12 = 13$$
$$BC = \sqrt{13}$$

3 – أ – $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}\right).\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}\right)$

$$= \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).\left(-\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$$

ب – لدينا : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2\right)$

$$= \frac{5}{4} \times 10 - \frac{1}{2}\left(4^2 + 3^2\right)$$
$$= \frac{50}{4} - \frac{1}{2} \times 25$$
$$= \frac{50}{4} - \frac{25}{2} = 0$$

إذن المستقيمان (BI) و (CJ) متعامدان .